On Hankel operators associated with a non-commutative Hardy space(Banach spaces, function spaces, inequalities and their applications)

大和田, 智義

数理解析研究所講究録
第 1570 巻 2007 年 41-45

On Hankel operators associated with a non-commutative Hardy space

静岡大学・教育学部　大和田 智義 (Tomoyoshi Ohwada)
Faculty of Education, Shizuoka University

1　序

古典的なハーディ空間に関する研究は, その不変部分空間の構造解析や極大性, 分解定理など多岐にわたり現在も発展を続けている. これらの理論の非可換化が様々な設定のもとで行われてきた. その 1 つにフォンノイマン環上の流れから定義される解析的部分環 ([1], [3]) があり, 可換な場合の性質がどの程度非可換な設定のもとでも有効かが多くの研究者によって調べられてきた. ハーディ空間の理論に関連して, Toeplitz 作用素や Hankel 作用素の研究も盛んである. 斎藤は解析的部分環の例を与える解析的接合積に関して, Toeplitz 作用素と Hankel 作用素の概念を導入して, 不変部分空間や分解性の研究, Nehari の定理の拡張など多くの結果を得ている. (cf. [4], [5], [7]) 著者は最近 [8] で斎藤 [6] が行った Sarason の補間定理の拡張を, フォンノイマン環が有限であるという仮定無しに証明した. それは吉野 [10] が可換な場合に与えた Toeplitz 作用素と Hankel 作用素の性質をうまく利用した証明方法を利用したものである. しかしそこでは非可換な性質が邪魔をして, 幾つかの障害があった. その 1 つに Hankel 作用素の共役作用素は一般に Hankel 作用素にはならないという性質がある. 可換な場合には Hankel 作用素の共役作用素はいつでも Hankel 作用素になることからも, 可換な場合と非可換な場合での大きな性質の相違である. これらの違いを明確にして行くことは, 今後研究を進める上で重要な情報を得られることが期待できる. ここでは解析的接合積に関する Hankel 作用素の共役作用素がいつ Hankel 作用素となるかを調べることにより, 可換なハーディ空間と非可換な場合との違いをより明確に捉えることを目的とする.

2 準備と定義

Mをヒルベルト空間$\mathcal{H}$上のフォンノイマン環とし, αをM上の$*$-自己同型写像とする. 一般性を欠くこと無く, フォンノイマン環を標準形と考えてよい. (cf. [2]) このとき$\mathcal{H}$上のユニタリ作用素uが一意に存在して$\alpha(x) = uxu^*$ $(\forall x \in M)$を満たす. ここでユニタリ作用素uはMの元である必要は無いことを注意しておく. ヒルベルト空間

$$\mathbb{L}^2 = \left\{ f : \mathbb{Z} \to \mathcal{H} \;\middle|\; \sum_{n \in \mathbf{Z}} \|f(n)\|^2 < +\infty \right\}$$

上の作用素としてL_x $(\forall x \in M)$とL_δを

$$(L_x f)(n) = x f(n), \qquad (L_\delta f)(n) = u f(n-1) \qquad (\forall f \in \mathbb{L}^2,\ \forall n \in \mathbb{Z})$$

により与えたとき, Mのαによる接合積$\mathfrak{L}$を

$$L(M) = \{L_x \mid x \in M\},\ L_\delta,\ L_\delta^*$$

により生成されたσ-弱閉環とし, その部分環として解析的接合積$\mathfrak{L}_+$を

$$L(M),\ L_\delta$$

により生成されたσ-弱閉部分環とする. $\mathbb{L}^2$の閉部分空間として

$$\mathbb{H}^2 = \{ f \in \mathbb{L}^2 \mid f(n) = 0,\ n < 0 \}$$

を考えて, $\mathbb{L}^2$から$\mathbb{H}^2$の上への射影作用素をPとし, $\mathbb{L}^2$上のユニタリ作用素Wを$(Wf)(n) = f(-n-1)$ $(\forall f \in \mathbb{L}^2,\ \forall n \in \mathbb{Z})$で与える. このとき任意の$A \in \mathfrak{L}$に対して Hankel 作用素$H_A$を

$$H_A f = W(I-P)(Af) \qquad (\forall f \in \mathbb{H}^2).$$

で定義する. すなわち$H_A = W(I-P)AP \in B(\mathbb{H}^2)$である.

3 Hankel 作用素の共役作用素

この章では Hankel 作用素の共役作用素が再び Hankel 作用素となるための同値な条件を与える. まずユニタリ作用素Wの基本的な性質を述べる.

補題 3.1 $\mathbb{L}^2$上のユニタリ作用素Wは以下の性質を備える.

(i) $W^2 = I$;

(ii) $W^* = W$;

(iii) $WPW = I - P$; そして

(iv) W は $\mathbb{L}^2$ を $\ell^2(\mathbb{Z})$ と $\mathcal{H}$ のテンソル積 $\ell^2(\mathbb{Z}) \otimes \mathcal{H}$ と同一視したとき, 行列表現 $(\delta_{i+j,-1})_{i,j=-\infty}^{\infty}$ をもつ.

W は $B(\mathbb{L}^2)$ に属するユニタリ作用素なので, 任意の $x \in B(\mathbb{L}^2)$ に対して $\Phi(x) = WxW$ とおけば $\Phi(B(\mathbb{L}^2)) = B(\mathbb{L}^2)$ をみたす. しかし一般に Φ は $\mathfrak{L}$ の自己同型写像にはならない. すなわち $\Phi(\mathfrak{L}) \neq \mathfrak{L}$ である. このことより, 任意の $A \in \mathfrak{L}$ に対して,

$$\begin{aligned}(H_A)^* &= (W(I-P)AP)^* \\ &= PA^*(I-P)W^* \\ &= W^2PW^2A^*(WPW)W^* \\ &= W(WPW)(WA^*W)PWW^* \\ &= W(I-P)\Phi(A^*)P\end{aligned}$$

となることから H_A の共役作用素は一般に Hankel 作用素とはならない. 一般に $\mathbb{H}^2$ 上のある有界線形作用素が Hankel 作用素となるための必要十分条件は Nehari の問題と関連して, 斎藤 [7] らによって既に与えられているが, 我々の考察において必要となる条件を補った以下の結果を得た.

$\mathbb{L}^2$ 上のユニタリ作用素 R_δ を

$$(R_\delta f)(n) = f(n-1), \qquad (\forall f \in \mathbb{L}^2,\ \forall n \in \mathbb{Z})$$

で与えたときに, $\mathbb{H}^2$ 上の等長作用素 U を $U = PR_\delta P = R_\delta P$ で与える.

定理 3.2 (cf. [7, Theorem 3.5]) H を $B(\mathbb{H}^2)$ の元とする. このとき以下は同値である.

(i) H は *Hankel* 作用素である. すなわち, ある $\mathfrak{L}$ の元 A が存在して $H = H_A$ を満たす.

(ii) H は $U^*H = HU$ を満たし WHP は $L(M)$ に属する.

(iii) H は行列表現 $(x_{-i-j-1}u^{-i-j-1})_{i,j=0}^{\infty}$ をもつ. ここで $x_k \in M$ $(\forall k \leq -1)$ である.

更に上記の条件のもとで我々は以下の等式を得る.

$$\|H\| = \inf\{\|A\| \mid A \in \mathfrak{L} \text{ かつ } H_A = H\}$$

これらの結果を利用して, 我々は次の主定理をえることができた.

定理 3.3 以下の条件は同値である.

(i) 任意の $\mathfrak{L}$ の元 A に対して, $(H_A)^*$ は *Hankel* 作用素である.

(ii) Φ は $\mathfrak{L}$ の自己同型写像となる. すなわち $\Phi(\mathfrak{L}) = \mathfrak{L}$ を満たす.

(iii) $\Phi(\mathfrak{L}_+) = \mathfrak{L}_+^*$ を満たす. ただし $\mathfrak{L}_+^* = \{A^* \mid A \in \mathfrak{L}_+\}$ である.

(iv) α^2 は M 上自明である.

(v) u^2 は M の中心 $M \cap M'$ に属する.

更に上記の条件のもとで $(H_A)^* = H_{\Phi(A^*)}$ が成り立つ.

次に定理 3.3 の条件を満たす簡単な例をあげる.

例 3.4 $L^\infty(\mathbb{T})$ を単位円 $\mathbb{T}$ 上の有界可測関数全体とする. 任意の $L^\infty(\mathbb{T})$ の元 f に対して α を

$$\alpha(f)(e^{2\pi i s}) = f(e^{2\pi i (s+\frac{1}{2})}) \quad (\forall s \in [0,1)),$$

で与えれば α は $L^\infty(\mathbb{T})$ 上の自己同型写像であり, 条件 $\alpha^2(f) = f$, $(\forall f \in L^\infty(\mathbb{T}))$ を満たす.

例 3.5 M を任意のフォンノイマン環とし, その自己同型写像 α が内部的, すなわち u は M に属するユニタリ作用素であるなら明らかに $u^2 \in M$ である. この場合, $\mathfrak{L}$ はテンソル積 $L^\infty(\mathbb{T}) \otimes M$ と同型であり, この対応で $\mathfrak{L}_+$ は $\mathbb{H}^\infty(\mathbb{T}) \otimes M$ へうつる.

注意 3.6 定理 *3.3* の条件を満たす解析的接合積は古典的なハーディ空間 $H^\infty(\mathbb{T})$ に近い性質を持つことが予想されるが, 実際には依然としてその構造は複雑なようである. 実際に *Hankel* 作用素の自己共役性をみてもそこには大きな相違がある. $L^\infty(\mathbb{T})$ の元 $\varphi(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$ $(a_n \in \mathbb{C})$ に関して, 対応する *Hankel* 作用素が自己共役, すなわち $(H_\varphi)^* = H_\varphi$ を満たすことと $a_n \in \mathbb{R}$ $(\forall n = -1, -2, \cdots)$ が成立することは同値であることは良く知られている. しかしながら, 仮に定理 *3.3* を満たす場合であっても, 任意の $\mathfrak{L}$ の元 A に対する *Hankel* 作用素が自己共役, すなわち $(H_A)^* = H_A$ が成り立つことと A の行列表現 $(x_{i-j}u^{i-j})_{i,j=-\infty}^{\infty}$ が $v = u^2$ で与えられる M の中心のユニタリ作用素 v に対して

$$x_{i-j}^* = \begin{cases} v^{i-j}\alpha^{i-j}(x_{i-j}) & (i-j = -1, -3, -5, \cdots) \\ x_{i-j} & (i-j = -2, -4, -6, \cdots), \end{cases}$$

を満たすことが同値である．さらに α が内部的であるとき，*Hankel*作用素が自己共役，すなわち $(H_A)^* = H_A$ を満たすことと任意の $i-j \in \mathbb{Z}_-$ に対して，$x^*_{i-j} = x_{i-j}$ であることが同値である．

これらの考察を通じて，古典的なハーディ空間と解析的接合積の間には比較的良い条件のもとであっても，その構造には大きな相違があるようであり，それらをより詳細に調べることは今後の課題の１つである．

参考文献

[1] W. B. Arveson, *Analyticity in operator algebras,* Amer. J. Math. **89** (1967), 578–642.

[2] U. Haagerup, *The standard form of von Neumann algebras.* Math. Scand. **37** (1975), 271–283.

[3] R. I. Loebl and P. S. Muhly, *Analyticity and flows in von Neumann algebras.* J. Funct. Anal. **29** (1978), 214–252.

[4] K-S. Saito, *Toeplitz Operators associated with analytic crossed products.* Math. Proc. Cambridge. Philos. Soc. **108** (1990), 539–549.

[5] K-S. Saito, *Toeplitz Operators associated with analytic crossed products II(Invariant subspaces and factorization).* Integral equatios and Operator Theory. **14** no.2 (1991), 251–275.

[6] K-S. Saito, *Generalized interpolation in finite maximal subdiagonal algebras.* Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **117** (1995), no. 1, 11–20.

[7] Y. Imina and K-S Saito, *Hankel operators associated with analytic crossed products.* Canad. Math. Bull. **37** (1994), no. 1, 75–81.

[8] T. Ohwada, *Sarason's interpolation theorem for analytic crossed products.* Funct. Anal. Appl. **40** (2006), no. 2, 151–154.

[9] T. Ohwada, *The adjoint operators of Hankel operators associated with analytic crossed products.* to appear in Acta math. Hungarica.

[10] T. Yoshino, *A simple proof of Sarason's result for interpolation in H^∞.* Yokohama Math. J. **44** (1997), no. 1, 21–24.